Concours Centrale - Supélec 1998

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Dans ce problème, on s'intéresse aux systèmes différentiels et aux suites récurrentes associés à une matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^3$. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. id_E désigne l'application identité de E. Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de E, est noté $\langle X, Y\rangle$.

Partie I - Endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que $\forall X \in E$, $\langle u(X), X\rangle = 0$.

I.A - Démontrer que $\forall (X, Y) \in E \times E$, $\langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle$.

I.B -

I.B.1) Démontrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.

I.B.2) Montrer que le polynôme caractéristique de u a au moins une racine réelle. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Ker}u$?

I.C -

I.C.1) Démontrer que si $X \in \mathrm{Ker}u$ et $Y \in \mathrm{Im}u$ alors $\langle X, Y\rangle = 0$.

I.C.2) En déduire que $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$ sont supplémentaires dans E.

I.D - Soit X un vecteur non nul de $\mathrm{Im}u$.

I.D.1) Démontrer que $(X, u(X))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}u$.

I.D.2) En déduire les dimensions de $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$.

I.E - Soient (e_1, e_2) une base orthonormale de $\mathrm{Im}u$ et e_3 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}u$. On pose $\alpha = \langle u(e_1), e_2\rangle$.

I.E.1) Démontrer que $u(e_1) = \alpha e_2$.

I.E.2) En déduire que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.F - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^0 = \mathrm{id}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.

I.F.1) Démontrer que $u^2 = -\alpha^2 p$ où p est une projection orthogonale à préciser.

I.F.2) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n en fonction de α, p et u, en distinguant suivant la parité de n.

I.G - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I.G.1) Démontrer que la somme $\sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!}$ s'écrit $\mathrm{id}_E + C_N(\alpha)p + S_N(\alpha)u$ où C_N et S_N sont des polynômes.

I.G.2) Trouver, à l'aide de séries entières bien choisies, les limites de $C_N(\alpha)$ et $S_N(\alpha)$ quand $N \to +\infty$. On note ces limites $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$, respectivement.

I.G.3) Caractériser géométriquement l'endomorphisme $\mathrm{id}_E + C(\alpha)p + S(\alpha)u$.

Partie II - Système différentiel

Dans toute cette partie, α est un réel non nul, et x, y, z trois fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II.A - Pour $t \in \mathbb{R}$, soit S le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha y(t) \\ y'(t) = \alpha x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

II.A.1) Montrer que S est équivalent à :

$$\begin{cases} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ x(t) = y'(t)/\alpha \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

II.A.2) Résoudre S.

II.A.3) Caractériser géométriquement les trajectoires solutions, c'est-à-dire les courbes

$$t \mapsto \overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ où } (x, y, z) \text{ est solution de } S.$$

II.B - Soit S_g le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -ay(t) - bz(t) \\ y'(t) = ax(t) - cz(t) \\ z'(t) = bx(t) + cy(t) \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls. On considère l'endomorphisme u de matrice, dans la base canonique de E,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

II.B.1) Démontrer que pour tout X de E, $\langle u(X), X\rangle = 0$.

II.B.2) Déterminer le noyau de u et une équation cartésienne de l'image de u.

II.B.3) Expliquer, en utilisant les résultats de I.E, comment la résolution de S_g peut se ramener à celle du système S.

II.B.4) Caractériser géométriquement les trajectoires solutions de S_g.

II.C - On reprend le système S_g défini à la question II.B, mais on suppose maintenant que $a.b.c$, sont des fonctions de t de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que (x, y, z) est solution de S_g et, pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point $(x(t), y(t), z(t))$.

II.C.1) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega(t)}$ tel que

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \overrightarrow{\Omega(t)} \wedge \overrightarrow{OM(t)}.$$

II.C.2) Démontrer que la courbe décrite par $M(t)$ est tracée sur une sphère de centre O.

II.D - Dans les deux questions suivantes, on étudie le système S_g dans le cas où : $a(t) = 0$, $b(t) = -\sin t$, $c(t) = \cos t$

II.D.1) Démontrer que si (x, y, z) est solution de S_g alors z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $z'' + 2z$ est constant.

II.D.2) En déduire l'expression de la solution générale (x, y, z) : on exprimera z sous la forme $\lambda\cos(\omega t + \mu) + \nu$ où ω est à déterminer et λ, μ et ν sont des constantes arbitraires, puis on en déduira x et y.

II.E - On cherche, parmi les solutions précédentes, celles qui vérifient pour $t = 0$:

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 0.$$

II.E.1) Expliciter une solution non nulle (x_1, y_1, z_1) et démontrer que les autres solutions sont proportionnelles à celle-là.

II.E.2) Étudier et tracer l'arc $t \to (x_1(t), y_1(t))$ sur $[0, \pi\sqrt{2}[$. Comment obtient-on l'arc sur $]-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}[$?

II.E.3) Représenter la trajectoire de $M_1(x_1, y_1, z_1)$ lorsque t décrit $]-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}[$.

Partie III - Suite récurrente

III.A - A désigne toujours la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

où a, b, c sont des réels non tous nuls et u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $X_{n+1} = u(X_n)$, pour tout E.

III.A.1) Justifier, en utilisant la partie I, l'existence d'une matrice orthogonale P et d'un réel positif α, tels que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

III.A.2) Exprimer α en fonction de $a.b.c$.

III.A.3) Notant (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de X_n, on pose

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Expliciter les relations de récurrence vérifiées par p_n, q_n, r_n.

III.B - Soit (x_n, y_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $x_{n+1} = -\alpha y_n$ et $y_{n+1} = \alpha x_n$. Démontrer que ces points sont situés sur une spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = ke^{m\theta}$ où l'on explicitera k et m en fonction de α, x_0, y_0. Indication : on pourra utiliser les nombres complexes.

III.C - Démontrer que cette spirale est invariante par la transformation plane

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix}$$

et préciser l'image d'un point $M(\theta)$ de la spirale par f.

III.D -

III.D.1) Déterminer le rayon de courbure en un point $M(\theta)$ de la spirale, en fonction de k, m, θ.

III.D.2) Calculer le rapport des rayons de courbure en un point M de la spirale et en son image $f(M)$, en fonction de α.

••• FIN •••